

應用資料探勘技術暨啟發式演化組合模型預測 離散纖維加勁土壤之剪力強度參數

周瑞生^{1*} 楊國鑫² 林婕瑩³

關鍵詞：纖維加勁土壤、土工合成材、尖峰剪力強度、資料探勘、人工智慧。

摘要

目前預測纖維加勁土壤剪力強度參數的理論或經驗公式皆具有不確定性，因此無法用簡化的公式描述複雜的土壤與纖維互制行為。本研究回顧 1983-2015 年有關纖維加勁土壤三軸與直剪試驗文獻，擷取纖維加勁土壤屬性與實驗數據，建立一樣本資料庫。接續應用資料探勘技術，包含 (1) 分類與迴歸法；(2) 機器學習法；(3) 啟發式演化組合模型法，建構纖維加勁土壤摩擦角預測模式。分析結果發現，主要影響纖維加勁土壤剪力強度預測的因子有纖維含量、纖維長徑比、土壤摩擦角以及應力參數。研究顯示啟發式演化模型組合法中的分類-迴歸層級法 Tiering SVM-(SVR/SVR) 最優，其預測值與實際值間的相關係數 $R = 0.89$ 、平均絕對值誤差率 $MAPE < 4\%$ 、均方根誤差 < 2 度、平均絕對誤差 $MAE < 2$ 度，而各評估指標之改善效能優於理論或經驗公式達 13.12 ~ 79.50%。

SHEAR STRENGTH PREDICTION FOR FIBER-REINFORCED SOILS BY DATA MINING TECHNIQUES AND THEIR ENSEMBLES

Jui-Sheng Chou Kuo-Hsin Yang Jie-Ying Lin

Department of Civil and Construction Engineering
National Taiwan University of Science and Technology
Taipei, Taiwan 10607, R.O.C.

Key Words : fiber-reinforced soils, geosynthetics, peak shear strength, data mining, machine learning, metaheuristic computation.

ABSTRACT

The accuracy of theoretical and empirical models for predicting the shear strength of fiber-reinforced soils (FRS) is questionable because of the difficulty of using these simplified models to describe the complex mechanism of soil-fiber interaction. This study compiled a large database of available high quality triaxial and direct shear tests on FRS documented in the literature from 1983 to 2015. The database includes information on the properties of sand, fibers, soil-fiber interface, and stress parameters. Data mining technologies were employed to identify factors influencing shear strength and to predict the peak friction angle of FRS. The analysis techniques included (1) classification and regression methods, e.g., linear REGression (REG) analysis, Classification And Regression Tree (CART) analysis, a GENeralized LINear (GENLIN) Model, and CHI-squared Automatic Interaction Detection (CHAID); (2) machine learners, e.g., Artificial Neural Network (ANN) and Support Vector Machine/Regression (SVM/SVR); and (3) meta ensemble models, e.g., Voting, Bagging, Stacking and Tiering. The analytical results indicated that fiber content, fiber aspect ratio, soil friction angle and stress parameter had the largest effects on FRS shear strength. The optimal model obtained after further model training, cross-

^{1*} 通訊作者，國立臺灣科技大學營建工程系教授

² 國立臺灣科技大學營建工程系副教授

³ 國立臺灣科技大學營建工程系研究助理

validation, and testing was the Tiering SVM-(SVR/SVR) method. The correlation coefficient of the prediction values with the measured values in the database was 0.89. The mean absolute percentage error was $< 4\%$, root mean square error was $< 2^\circ$, and mean absolute error was $< 2^\circ$. The overall improvement in performance measures was $13.12\% \sim 79.50\%$ with respect to theoretical or empirical models.

一、研究緣起與目的

自然大地材料 (如土、石) 常需輔以人造材料 (或地工合成材) 像是地工織物、地工格網、地工止水膜、地工複合材料等 (Gray and Ohashi [1]), 以提升土壤在大地與環境工程應用中, 其力學與水力性質的表現。地工合成材係經濟有效的土壤加勁工法, 在過去幾十年來已被廣泛的應用於許多大地工程案例中。傳統的加勁工法是使用連續平面狀的加勁材 (如地工織物與地工格網), 將其分層水平鋪設, 利用加勁材的張力強度來提升加勁擋土構造物的整體穩定性。

將土壤與離散的纖維均勻混合為另一種有效的纖維加勁工法, 可穩定坡面上的薄覆土層、修復局部邊坡破壞、改善軟弱土壤的基礎承载力、增加鋪面下與擋土牆內土壤的強度、提升水岸土工構造物內土壤抗管湧破壞的抵抗力、增加地震作用下土壤抗液化的抵抗力, 減少土壤表面沖蝕、以及控制夯實黏土的乾縮裂縫等。與平面加勁材相比, 加勁纖維比較不易於施工過程中受損。此外, 加勁纖維因為與土壤均勻混合, 所以不會像平面加勁材易沿土壤與加勁材介面產生弱面。

其他採用加勁纖維之優點包含: (1) 纖維與土壤容易均勻混合 (Hejazi and Sheikhzadeh *et al.* [2], Li and Tang *et al.* [3])、(2) 添加纖維屬物理行為 (非化學行為), 對環境負面衝擊小 (Chauhan and Mittal *et al.* [4])、(3) 纖維的離散特性優化土壤與纖維互制效果, 纖維平均分佈於土壤內, 促使等向的提升土壤剪力強度 (如增加尖峰剪力強度與殘餘剪力強度) (Yetimoglu and Salbas [5])、(4) 纖維可提升土壤的張力強度, 使其較不易受天候影響而產生乾縮裂縫 (Hejazi and Sheikhzadeh *et al.* [2])。

過去文獻已針對纖維加勁土壤 (Fiber-reinforced soil, FRSS) 力學機制進行探討 (Yetimoglu and Salbas [5], Kumar and Tabor [6], Maher and Gray [7], Michalowski and Zhao [8], Michalowski and Čermák [9], Mortazavian and Fatemi [10], Ranjan and Vasani *et al.* [11], Shao and Cetin *et al.* [12]), 並提出預估纖維加勁土壤剪力強度參數之理論與經驗公式。這些公式雖然具有方便使用的優點, 但由於理論或經驗公式將複雜的土壤與纖維互制行為簡化, 加上忽略了纖維加勁土壤強度參數與推測因子間可能的高度非線性關係, 導致公式存有不确定性, 其預測準確度受到質疑。有鑒於此, 本研究應用資料探勘技術, 建置新穎組合式人工智慧模型, 提供纖維加勁土壤剪力強度參數預測時的參考選項。

為驗證研提之預測模型準確性, 本文收集 1983 ~ 2015 年纖維加勁土壤之三軸與直剪試驗的文獻資料, 考慮的參數包含土壤物理與力學性質 (土壤種類、分類、平均粒徑

D_{50} 、乾單位重 γ_d 、摩擦角 ϕ)、纖維幾何與物理特性 (纖維種類、長度 L_f 、直徑 D_f 、體積含量 X_f 、重量含量 W_f 、及比重 $G_{s,f}$)、土壤纖維介面參數 (介面摩擦角 δ 與介面係數 $C_{i,\delta}$)、及應力條件 (圍壓 σ_3 或正應力 σ_n) 等。

何資料庫建置完成後, 應用資料探勘技術, 包含人工類神經網路 (ANN)、分類迴歸樹 (CART)、卡方自動交叉檢驗 (CHAID)、線性迴歸模型 (REG)、廣義線性模型 (GENLIN)、支援向量機 (SVM) 及迴歸機器學習 (SVR) 等人工智慧模型進行基準 (Baseline) 分析, 並組合最佳模型 (Ensemble model) 設計一系列的啟發式演化探勘技術, 諸如表決法 (Voting)、重複採樣平均表決法 (Bagging)、演化堆疊法 (Stacking)、分類-回歸層級法 (Tiering), 期提高模型績效, 改善纖維加勁土壤摩擦角 ϕ_{FRS} 之預測準確度。

研究成果預期可回饋於工程設計實務, 協助工程師快速推估纖維加勁土壤之剪力強度, 提升工程設計階段之決策資訊品質, 依精確的加勁土壤設計強度規劃施工材料成本及降低破壞風險等。本論文後續研究架構 (如圖 1 所示) 說明如下: 首先藉由文獻回顧, 蒐集纖維加勁土壤相關資料, 進而說明文獻資料數據化方式及資料庫建立。依資料分佈建構預測模型, 包含人工智慧基準及組合模型的訓練、驗證與測試, 從中篩選最優模型, 並與理論及經驗公式的推估結果進行比較, 最後提出研究結論與建議。

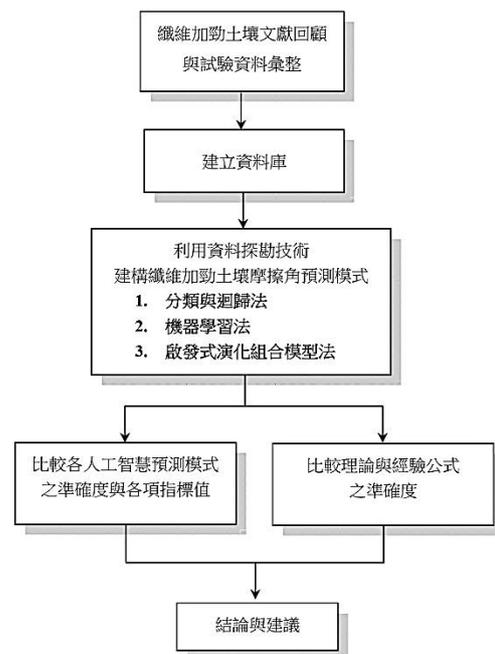


圖 1 研究流程圖

二、文獻回顧

2.1 纖維加勁土壤介紹

纖維加勁土壤係藉由土壤與離散的纖維相互均勻混合，茲以提升土壤的剪力強度 (Ibraim and Fourmont [13])。簡言之，離散纖維所提供的加勁功能即係仿效抓住土壤的植物根系。加勁纖維又分自然纖維或人造纖維。自然纖維包括蘆葦、椰子、劍麻、棕櫚、黃麻、亞麻、竹子、稻草、藤等，於土木工程的應用中扮演著「生態－複合」之角色 (Hejazi and Sheikhzadeh *et al.* [2])。自然纖維的優點為成本低、可生物分解、對環境衝擊小、質量輕、具良好的介面特性 (粗糙度、角度等)；缺點為纖維品質及產量取決於自然環境，無法人為控制，而纖維的親水特性可能降低加勁效果。

在自然纖維加勁的研究中，Santoni and Tingle *et al.* [14] 指出，蘆葦纖維優於玻璃纖維，係因自然纖維擁有良好的介面特性。Sivakumar Babu and Vasudevan *et al.* [15] 使用椰殼纖維加勁，實驗結果顯示椰殼纖維可以提升土壤的剪力強度。Ahmad and Bateni *et al.* [16] 運用椰殼及飛灰加勁粉質砂土，比較塗抹與未塗抹防水塗料之纖維，結果顯示塗抹防水塗料的纖維的力學特性優於未塗抹者。Angraini and Asadi *et al.* [17] 以張力試驗與無圍壓縮試驗探討添加椰殼纖維與石灰對軟土的影響，結果顯示纖維與石灰的加勁效果受最佳含水量控制，且當纖維含量達 1%，即可有效提升土體的摩擦角。

在人造纖維方面，其種類包括聚丙烯 (PP)、聚對苯二甲酸乙二酯 (PET)、聚乙烯醇 (PVA)、玻璃、尼龍、鋼絲等。其優點為強度高、使用壽命長、品質及產量易受控制、抗化學侵蝕、抗生物分解、抗氣候變化等。其中又以聚丙烯 (PP) 纖維運用最為廣泛 (Hejazi and Sheikhzadeh *et al.* [2])。Al-Refeai [18] 在人造纖維加勁的研究報告指出，PP 纖維優於玻璃纖維，且最佳纖維長度約 76 mm。然 Gray and Al-Refeai [19] 研究顯示，當纖維含量 > 2% 時，將無法有效影響土壤力學行為或產生額外益處。

Kumer and Tabor [6] 實驗研究發現尼龍纖維改善土壤殘餘剪力強度的能力高於尖峰剪力強度。Consoli and Montardo *et al.* [20] 採三軸試驗探討 PP 纖維加勁水泥砂土，研究指出 PP 纖維可增加水泥砂土的尖峰剪力強度，並提升其勁度。Michalowski and Zhao [8] 運用三軸試驗探討鋼絲纖維加勁土壤，研究顯示鋼絲纖維可提升土壤的尖峰剪力強度。Mortazavian and Fatemi [10] 回顧短型人造纖維疲勞行為的相關文章，認為纖維疲勞行為主要係受含水量、溫度等因子影響，而當纖維長徑比增加，疲勞行為亦增加。

綜上所述，離散纖維加勁材料易與土壤均勻混合，提升土壤等向的剪力強度，有效避免或延遲特定破壞面的產生，進而強化纖維加勁土工構造物的整體穩定性。

2.2 現行纖維加勁土壤剪力強度參數預測方法

纖維加勁土壤的剪力強度參數可由實驗室試驗或是由理論與經驗公式推估獲得，而後者為實務應用上較偏好用的方式。在所有的理論與經驗公式中 (Li and Tang *et al.*

[3], Yetimoglu and Salbas [5], Michalowski and Zhao [8], Michalowski and Čermák [9], Zornberg [21], Li and Zornberg [22])，以 Zornberg [21] 與 Michalowski and Čermák [9] 所提出的估算方式最受廣泛討論與應用。在他們的公式中，考慮的參數包括纖維參數、土壤尖峰剪力強度參數、以及土壤纖維介面參數。

特別一提的是，受到應力以及纖維長度的影響，纖維加勁土壤可能的破壞模式分為纖維斷裂破壞與纖維拉出破壞。當所受應力較大及纖維長度較長，纖維加勁土壤的破壞模式受纖維斷裂破壞控制；反之，當所受應力較小或纖維長度較短，則以纖維拉出為主要的破壞模式。因為在大部分工程應用的應力範圍下，纖維加勁土壤的破壞模式多受纖維拉出破壞控制，本研究及以下內容將專注探討纖維拉出破壞模式下的加勁土壤剪力強度參數預測。

Michalowski and Čermák [9] 從能量消散的概念，提出預測纖維加勁土壤剪力強度參數的理論公式，因其理論依據又稱為能量法 (energy-based model)。在軸對稱應力作用下，Michalowski and Čermák 理論公式計算纖維加勁土壤的摩擦角如下：

$$\phi_{FRS} = 2 \tan^{-1} \sqrt{\frac{X_f \eta_f M \tan \delta + 6K_p}{6 - X_f \eta_f M \tan \delta}} - \frac{\pi}{2} \quad (1)$$

其中

$$M : K_p \sin \theta_0 \quad (2)$$

$$K_p : \tan^2 \left(45 + \frac{\phi}{2} \right) \quad (3)$$

$$\theta_0 : \tan^{-1} \sqrt{\frac{K_p}{2}} \quad (4)$$

其中： ϕ_{FRS} 為纖維加勁土壤的摩擦角； X_f 為纖維體積含量百分比； η_f 為纖維長徑比； ϕ 土壤摩擦角； δ 為土壤纖維介面摩擦角。

Zornberg [21] 利用雙線性破壞包絡的概念，發展一半經驗公式，用以預測纖維加勁土壤的剪力強度參數。Zornberg 公式中，考慮加勁纖維受力後所發展的張力，直接貢獻於增加纖維加勁土壤的剪力強度，而該半經驗公式又稱為離散法 (discrete model)。Zornberg 公式在考量纖維拉出破壞模式下，纖維加勁土壤摩擦角的經驗式為：

$$\phi_{FRS} = \tan^{-1} \left((1 + \alpha \cdot \eta_f \cdot X_f \cdot c_{i,\phi}) \cdot \tan \phi \right) \quad (5)$$

其中： ϕ_{FRS} 為纖維加勁土壤的摩擦角； α 為經驗係數，考慮纖維理於土內的方向與效能， α 值介於 0 ~ 1，當纖維均勻分佈於土內並發揮其 100% 效能，則 $\alpha = 1$ 。 ϕ 為土壤摩擦角； η_f 為纖維長徑比； X_f 為纖維體積含量百分比； $c_{i,\phi}$ 為土壤纖維介面摩擦係數 (= $\tan \delta / \tan \phi$)。

Najjar and Sadek *et al.* [23] 進而應用統計方法，定量分析上述兩種模式的不確定性與推測上的精確度。比較結果顯示 Michalowski and Čermák 理論公式 (能量法) 低估纖維加勁土壤的摩擦角約 10%，而 Zornberg 半經驗公式 (離散

法) 則高估約 6%，其偏差值 (bias value) 的變異係數分別為 0.2 與 0.17。Najjar and Sadek *et al.* 說明預測上的誤差來自某些因子 (如土壤顆粒與纖維相對尺寸的效果) 可能會影響土壤與纖維的互制行為，然而在簡化的理論或經驗公式中並未考量。此外，纖維加勁土壤強度參數與纖維含量間的非線性關係，亦於公式中忽略。

故後續，本研究將依建立的纖維加勁土壤資料庫，先行評估上述兩項公式推測的準確度，再與本研究發展的預測模型結果進行比較，茲以瞭解人工智慧技術預測績效暨其改善率。

2.3 人工智慧於大地工程的應用

近年來人工智慧成功應用於大地工程中，已成為設計規劃優選的替代方法之一。例如 Goh [24] 以人工類神經網路 (ANN) 探討土壤參數與土壤液化潛勢間的映射關聯性，考慮的因子包含標準貫入試驗值、土壤參數及地震參數，結果顯示重要的影響參數為細砂含量與標準貫入試驗值。Park and Kim [25] 運用 ANN 預測輕質加勁土壤的強度，認為主要影響其強度的因子為水泥含量、含水量及空氣含量。另，Samui [26] 使用多元迴歸模型進行邊坡穩定分析。

Alkroosh and Nikraz [27] 則以圓錐貫入試驗模擬樁基礎受載沉陷行為，使用 ANN 預測樁基礎貫入砂土的軸向沉陷，研究結果顯示 ANN 模型能有效預測基礎加載下的非線性行為。Tsompanakis and Lagaros *et al.* [28] 透過 ANN 模擬河堤受震下非線性之行為與反應，以降低大規模預測地震影響的工程成本。Benardos and Kaliampakos [29] 亦使用 ANN 模型求得不同地質條件下，隧道工法之推進速度，以利有效管理工程進度。

Goh and Kulhawey *et al.* [30] 採用貝氏神經網路分析鑽掘式基樁不排水狀況下的側向承載力，研究發現貝氏模型不僅能進行預測，並能提供資料參數間不確定性關係的錯誤特徵訊息；Alkroosh and Nikraz [31] 使用基因表達式規劃模型探討基樁軸向承載能力與圓錐貫入試驗資料的相關性，結果顯示研發模型的樁基礎承載力預測值與實際量測值間具高度正相關 (相關係數 $R = 0.96$)。

隨著時代科技的進步與大地工程的精度需求，學者專家們進而整合人工智慧與優化技術。例如：Armaghani and Hajihassani *et al.* [32] 以質群演算法優化人工類神經網路模型 (PSO-ANN)，求得岩石相關力學指數。研析結果顯示 PSO-ANN 預測岩石材料剪力強度參數值與實際值的相關性高達 0.96；Yu and Zhang *et al.* [33] 以智能變位反分析法 (DBA) 探討岩石壩之力學行為，透過 ANN 模型與演化運算法的結合，證實優化智慧預測技術能彌補有限元素法無法有效模擬非線性大變形的工程問題。

Chou and Yang *et al.* [34] 則提出智能螢火蟲最佳化演算法結合最小平方支援向量迴歸 (SFA-LSSVR) 預測加勁土壤擋土牆內加勁材所受之張力。該演化預測模型能輔助有限元素法無法有效分析大變形之問題，研究成果顯示所提出的模型預測能力遠勝於單一模型與複合模型，而模型預測加勁材之張力負荷量與實際量測值之相關係數 R 值高達 0.99，且 MAPE 小於 10%。

綜前所述，人工智慧為具前瞻性之有效預測工具。次節即摘要說明人工智慧基本預測方法，及本研究提出之創新演化組合技術，作為後續纖維加勁土壤剪力強度參數預測的理論基礎。

三、研究方法

3.1 分析模型

本研究採用的人工智慧技術，包含分類與迴歸法、機器學習法及啟發式模型組合法 (meta ensemble models)，分項扼要說明如下。

3.1.1 分類與迴歸法

1. 線性迴歸模型 (REG)

線性迴歸模型 (linear REGression, REG) 為利用線性迴歸方程的最小平方函數建構一個或多個解釋變數和應變數之間的關係 (Sykes [35])，可解釋變數間的相關性 (correlation) 和預測 (prediction) 問題 (IBM [36])。實務研究中，應變數 Y 的變化往往受特徵因素 X 的影響，一般式如下：

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \dots + \beta_p X_{pi} + e_i \quad (6)$$

Y_i 為應變數； $X_{1i}, X_{2i}, \dots, X_{pi}$ 為解釋變數； β_0 為常數項； $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p$ 為迴歸係數； e_i 為誤差值。

2. 分類迴歸樹 (CART)

分類迴歸樹 (Classification And Regression Tree, CART) 係一種經驗學習的預測模型，簡易且運算效率高，若目標變數是類別型變數，稱為分類樹；若目標變數係連續型變數，則稱迴歸樹。分析程序為先建立一樹狀結構，樹的中間節點為測試條件，樹的分支代表條件測試的結果，樹的葉節點代表分類後所得到的分類標記或迴歸結果 (IBM [36], Timofeev [37])。

CART 模型係以反覆運算的方式，及修剪準則調校整體誤差率，使分類迴歸樹不僅預測能力更好且分支最少。而 CART 分支多以 Gini 係數為標準，亦用做分支節點的判定 (Timofeev [37])。詳細理論公式及推導流程，可參見 IBM Clementine Algorithms Guide [36] 及 Timofeev [37]。

3. 卡方自動交叉檢驗 (CHAID)

卡方自動交叉檢驗 (Chi-squared Automatic Interaction Detector, CHAID) 為一高效率的統計決策樹，係於 1980 年由 Kass 等人提出 (IBM [36], Kass [38])。它在建立決策樹過程中，主要係利用卡方統計檢定 (Chi-squared test) 尋找最優的分支節點，重複執行合併和拆分的過程。此一分割過程持續進行到分群結果無顯著差異，或分群後之小群體所含之樣本單位過少，以致無法估計具有顯著意義的機率為止。而 CHAID 模型依據不同資料屬性，有不同的測量方法，若資料屬性為連續型，模型使用 F 檢定；資料屬性為類別型，則採卡方檢驗。

4. 廣義線性迴歸模型 (GENLIN)

廣義線性模型 (GENeralized LINear regression,

GENLIN) 為於 1972 年由 Nelder 與 Wedderburn 提出 (IBM [36], Nelder and Wedderburn [39])。相較於線性迴歸 (REG), GENLIN 的運用更為廣泛且符合實際情況,除不受限於常態分佈資料,亦可用於分析不同分佈類型之數據,包含二進位的邏輯模型或對數線性模型等。GENLIN 用於建立 X (輸入值) 與 Y (輸出值) 之間的函數定義如下:

$$Y = g(E(y)) = (X \cdot \beta) + O \quad (7)$$

g 為鏈結函數; $E(y)$ 為 y 的期望值; β 為迴歸係數; O 為偏移變量。

3.1.2 機器學習法

1. 人工類神經網路 (ANNs)

人工類神經網路 (Artificial Neural Networks, ANNs) 是以類似於人類大腦神經突觸聯接的結構,模仿生物神經的資訊處理系統 (Das [40]), 其為一虛擬的系統,用於接收多重輸入值,相互結合並用於預測 (IBM [36])。ANNs 運算處理的單元稱為「神經元」,特點包括 (1) 過濾功能:當某節點輸入的待處理數據不完整時,此一輸入對網路不會造成顯著影響;(2) 適應性學習能力:可調整節點與節點之間的連結權重值;(3) 可為多輸入與多輸出系統,

類神經網路基本架構包含:輸入層 (input layer)、隱藏層(hidden layer) 及輸出層 (output layer)。每一個處理單元 (processing element) 的輸出值傳到其它的處理單元便成為該單元的輸入值,其中的網路模式映射關係可以下式表達:

$$a_i = \sigma(\sum_j \omega_{ij} o_j), \sigma(x) = \frac{1}{1 - e^{-x}} \quad (8)$$

其中, a_i 為類神經之活動; ω_{ij} 為兩神經元之間的連結權重值 (weight); o_j 為輸出值 (output), 係類神經模型的輸出信號; $\sigma(x)$ 為類神經模型轉換函數 (activation function), 本例為 Sigmoid 映射函數,其目的係將其它處理單元的輸入值作加權乘積,轉換為處理單位的輸出值。

2. 支援向量 (SVM) 與迴歸機器學習 (SVR)

支援向量機 (Support Vector Machines, SVMs) 最初由 Vapnik 提出 (Vapnik [41]), 係一種監督學習技術,利用超平面進行分類,若目標變數是類別型資料,稱為支援向量機 (SVM); 若目標變數為連續型資料,則稱迴歸機器學習 (SVR), 因此 SVM/SVR 可用於解決類別型與數值迴歸之問題 (Tinoco and Gomes Correia *et al.* [42], Lee and Chern [43], Chern and Lee [44])。

支援向量機的基本概念是透過映射函數 Φ , 將資料 x 映射到高維度特徵空間,並在該空間進行分類或迴歸,如下列簡式:

$$f(x, \omega) = \Phi(x, \omega) + b \quad (9)$$

其中, ω 為權重向量 (weight vector), 代表 $f(x)$ 在高維空間中的平坦程度 (flatness); b 為門限值; Φ 為高維特徵空間,代表輸入空間 x 的映射函數。

迴歸機器學習 (SVR) 使用 ϵ 函數 (不敏感損失), 尋找最小化維度空間 $\|\omega\|^2$ 平坦度的同時並降低模型的複雜

度。且在遵循結構風險最小化原則之下,藉著參數 C 的導入,使支援向量迴歸的誤差 ($R_{reg}(C)$) 能權衡優化模型複雜度與經驗誤差:

$$R_{reg}(C) = \frac{1}{2} \|\omega\|^2 + C \sum_{i=1}^n (\xi_i + \xi_i^*) \quad (10)$$

$$L_\epsilon(x, \omega) = [y, f(x, \omega)] = \begin{cases} 0 & \text{if } |y - f(x, \omega)| \leq \epsilon \\ |y - f(x, \omega)| & \text{otherwise} \end{cases} \quad (11)$$

$$\text{Subject to: } \begin{cases} y_i - \omega < -b \leq \epsilon + \xi_i \\ \omega < y_i + b - y_i + \xi_i^* \\ \xi_i, \xi_i^* \geq 0 \end{cases} \quad (12)$$

其中, $R_{reg}(C)$ 為迴歸誤差 (regression risk); 而 $\|\omega\|^2$ 可用來衡量 $f(x)$ 的平坦度,也代表模型的複雜度; $C \sum_{i=1}^n (\xi_i + \xi_i^*)$ 為經驗誤差, C 為懲罰常數 (regularized constant); x 為超平面上的訓練樣本; ω 為垂直於超平面的向量; ϵ 為不敏感損失函數; y_i 為實體目標; b 為平均偏移量; ξ_i, ξ_i^* 為非負數自由變量。

3.1.3 啟發式演化模型組合法 (Meta Ensemble Models)

為精進前述基準 (Baseline) 模型之表現,本研究藉由啟發式的組合,演化數種創新模式如下:

1. 表決法

表決法 (Voting) 係以數個模型輸出的平均為預測值 (圖 2(a)), 藉由結合表現較佳之異質 (heterogeneous) 模型進行預測,常可提高精度 (Prodromidis and Stolfo [45])。

2. 重複取樣平均表決法

重複取樣平均表決法 (Bagging) 如圖 2(b), 過程為先隨機重複選取 K 群資料樣本,再結合同質 (homogeneous) 之預測模型進行平均表決輸出值 (Breiman [46])。

3. 演化堆疊法

演化堆疊法 (Stacking) 為多層次的串聯預測 (Wolpert [47]), 首先第一階層為由基準模型構成,將模型所預測之結果 (輸出值 $Y_{i=1-n}$) 作為第二階層的輸入值 X ,再進行預測 (Y_{pred}), 如圖 2(c) 所示。

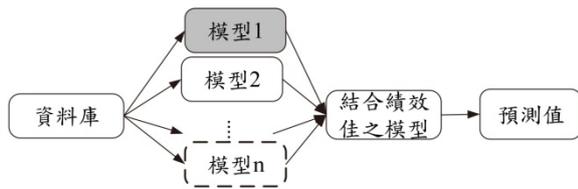
4. 分類-迴歸層級法

分類-迴歸層級法 (Tiering) 係將資料分為兩階層分析,第一層依文獻建議 (Chou and Tsai [48]), 採用機器學習模型 (SVM) 進行分類,第二階層則將前項分類結果,對照標準值 (T 值) 預先分成的所屬類別 (例如:歸屬於 1 類、2 類、3 類直至 k 類), 接續依所分類別群組內資料所建構之迴歸模型進行預測,建構流程如圖 2(d) 所示。

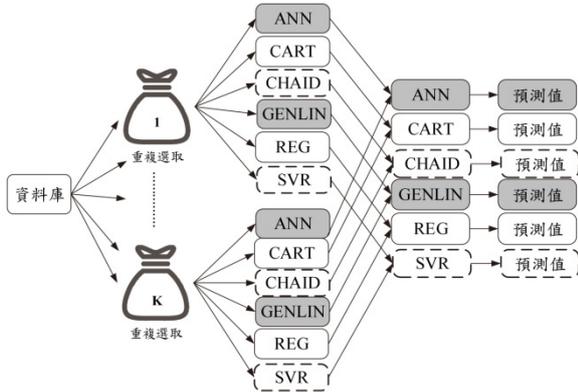
以本研究資料庫為示範例,表 1 係以文獻標準值 (T 值) 作基準,通式 $T = \frac{Y_{\max} + Y_{\min}}{k}$, 例如:若將總資料分

為三大類, $T = \frac{Y_{\max} + Y_{\min}}{3}$, 則 $Y_{act} \leq T$ 屬類別 1;

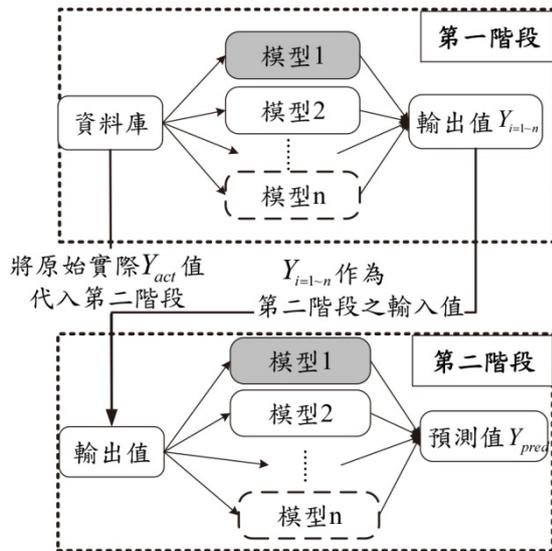
$T < Y_{act} \leq 2T$ 屬於類別 2; $2T < Y_{act}$ 屬於類別 3, 依此類推 k 類,輸出結果需與資料實際分佈狀況加權平均後,方為客觀的預測績效。



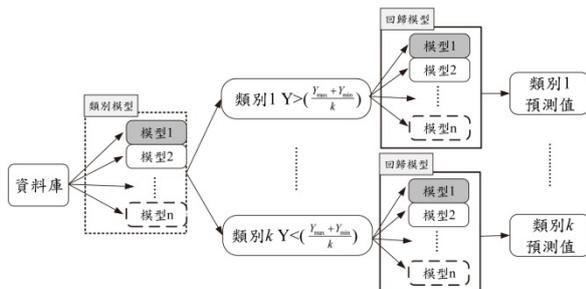
(a) 表決法



(b) 重複取樣平均表決法



(c) 演化堆疊法



(d) 分類-迴歸層級法

圖 2 啟發式模型組合法示意圖

表 1 分類-迴歸層級法之纖維加勁土壤資料分類數

		資料分類			
		2類	3類	4類	5類
資料分群	1	250	21	0	0
	2	50	275	250	118
	3	-	4	50	164
	4	-	-	0	18
	5	-	-	-	0
總計		300			

3.2 交叉驗證法

為比較模型間的預測技術績效，學理上常採交叉驗證法 (*k*-fold cross validation)，評估各模型的預測準確率 (accuracy) 及可靠度 (reliability)。此方法為隨機抽取測試樣本，並區隔訓練與測試樣本。首先，拆分 *k* 組互斥子樣本群，輪流將其中 (*k*-1) 組的子樣本當作訓練 (training) 樣本，剩餘的子樣本作為測試 (test) 樣本，重複訓練建模、測試 *k* 次後取平均，可有效降低隨機抽樣之誤差。Kohavi [49] 認為當 *k* 值為 10 時，已具分析效度，可兼顧計算成本與優化推估偏差。故本研究分別將十組的預測相關性及誤差取平均值後，客觀比較模型的平均預測效能。

3.3 模型預測效能評估方法

本文採四種常用以衡量預測效能的統計方法，量測模型預測值與實際值間的適配度及誤差 (率)：相關係數 (*R*)、平均絕對值誤差率 (MAPE)、均方根誤差 (RMSE) 及平均絕對誤差 (MAE)。其中，*R* 為判斷兩者相關性之重要指標，愈趨近於 1，代表預測擬合度越高；相對地，MAPE、RMSE、MAE 值愈低，則代表模型預測誤差 (率) 愈低。此外，為能客觀評估模型整體預測績效，另提出平均正規化概念，綜合考量以上衡量準則之綜效指數 (SI)，各評估方法簡述如下：

1. 相關係數 (correlation coefficient, *R*)

反映兩變數間線性關聯的統計指標稱為相關係數，其值介於 -1 與 +1 之間，公式如下：

$$R = \frac{n \sum_{i=1}^n y_i \times p_i - \sum_{i=1}^n y_i \times \sum_{i=1}^n p_i}{\sqrt{n \times \sum_{i=1}^n y_i^2 - (\sum_{i=1}^n y_i)^2} \times \sqrt{n \times \sum_{i=1}^n p_i^2 - (\sum_{i=1}^n p_i)^2}} \quad (13)$$

其中，*p_i* 為預測值；*y_i* 為實際值；*n* 為樣本數；*R* > 0 時，表示兩變數正相關；*R* < 0 時，兩變數為負相關。

2. 平均絕對值誤差率 (mean absolute percentage error, MAPE)

又稱為平均絕對誤差百分比，常作為預測模式準確率之主要評估指標，當 MAPE 值愈趨近於零，表示預測效果愈佳，一般 MAPE 小於 10%，表示模式效能為高度準確。

$$MAPE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left| \frac{p_i - y_i}{y} \right| \quad (14)$$

3. 均方根誤差 (root mean square error, RMSE)

代表預測誤差的離散程度，反映模型預測的精密度。

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n [P_i - y_i]^2}{n}} \quad (15)$$

4. 平均絕對誤差 (mean absolute error, MAE)

絕對誤差是預測值對實際值偏離的平均絕對距離，因此它的單位與預測值（實際值）的單位相同。

$$MAE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |P_i - y_i| \quad (16)$$

5. 綜合績效指數 (synthesis index, SI)

為綜合上述評估公式之總體績效，可以下式正規化平均各衡量指標，計算綜合績效指數，SI 值範圍介於 0~1 間，愈接近 0 代表預測模型愈為準確。需注意的是，計算 SI 前 R 值需先行反轉成 (1-R)，再與其它誤差指標進行平均正規化。

$$SI = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \left(\frac{P_i - P_{\min,i}}{P_{\max,i} - P_{\min,i}} \right) \quad (17)$$

P_i 為第 i 種平均預測績效評估值； $P_{\min,i}$ 為第 i 種預測績效的最小評估值； $P_{\max,i}$ 為第 i 種預測績效的最大評估值； m 為評估準則之種類數。

四、資料蒐集與預處理

本研究回顧 1983~2015 年間纖維加勁土壤相關文獻，收集三軸以及直剪試驗的試驗資料，以建立一數據資料庫。從回顧文獻中發現 63.3% 的文獻主要探討纖維加勁土壤之力學行為 (Gray and Ohashi [1], Hejazi and Sheikhzadeh *et al.* [2], Yetimoglu and Salbas [5], Maher and Gray [7], Michalowski and Zhao [8], Ranjan and Vasan *et al.* [11], Shao and Cetin *et al.* [12], Ibrahim and Fourmont [13], Sivakumar Babu and Vasudevan *et al.* [15], Gray and Al-Refeai [19], Consoli and Montardo *et al.* [20], Zornberg [21], Nataraj and McManis [50], Loehr and Romero *et al.* [51], Li and Zornberg [52], Freitag [53], Consoli and Festugato *et al.* [54], Consoli and Casagrande *et al.* [55], Consoli and Casagrande *et al.* [56])；20% 為發展纖維加勁土壤剪力強度參數的預測模式 (Maher and Gray [7], Santoni and Tingle *et al.* [14], Najjar and Sadek *et al.* [23], Consoli and Vendruscolo *et al.* [57], Ranjan and Vasan *et al.* [58], Sadek and Najjar *et al.* [59])；其餘分別為研究添加水泥沙漿對纖維加勁效果的影響 (13.3%) (Chauhan and Mittal *et al.* [4], Ahmad and Bateni *et al.* [16], Consoli and Prietto *et al.* [60], Kaniraj and Havanagi [61]) 以及纖維加勁土壤於工程實務案例探討 (3.3%) (Santoni and Tingle *et al.* [14])。

本章節首先探討影響纖維加勁土壤強度特性之相關研究，以決定後續分析應考量的因子。之後簡述如何將文獻資料數據化，以及說明纖維加勁土壤資料庫之建置內容。

4.1 纖維加勁土壤剪力強度參數之影響因子

Ibrian and Fourmont [13] 認為影響纖維加勁土壤剪力強度參數的因子包含圍壓、土壤參數、纖維種類及其物理性質如密度、長度、長徑比、排列方向。Consoli and Prietto

et al. [60] 採用三軸試驗探討纖維與水泥沙漿對於砂土的影響，考慮的試驗因子包含土壤類型、比重、均勻係數、纖維長度、寬度、比重。Yetimoglu and Salbas [5] 採直剪試驗探討離散纖維之加勁功效，考慮的試驗因子包含纖維強度、尺寸、比重、及土壤參數。Sivakumar Babu and Vasudevan *et al.* [15] 研究纖維加勁砂土之行為，考量纖維長度、直徑、纖維含量、土壤類型、乾土密度、單位重、土壤強度等因子對纖維加勁土壤剪力強度的影響。

綜合相關文獻 (Yetimoglu and Salbas [5], Maher and Gray [7], Michalowski and Zhao [8], Michalowski and Čermák [9], Shao and Cetin *et al.* [12], Ibrahim and Fourmont [13], Sivakumar Babu and Vasudevan *et al.* [15], Ahmad and Bateni *et al.* [16], Al-Refeai [18], Gray and Al-Refeai [19], Consoli and Montardo *et al.* [20], Nataraj and McManis [50], Li and Zornberg [52], Consoli and Festugato *et al.* [54], Consoli and Casagrande *et al.* [56], Sadek and Najjar *et al.* [59], Consoli and Prietto *et al.* [60], Al-Refeai [62], Chen [63], Gregory [64]) 闡述之影響因子，本研究歸納採擷的影響因素類別包括土壤物理與力學性質 (土壤種類、分類、平均粒徑 D_{50} 、乾單位重 γ_d 、摩擦角 ϕ)、纖維幾何與物理特性 (纖維種類、長度 L_f 、直徑 D_f 、體積含量 X_f 、重量含量 W_f 、及比重 $G_{s,f}$)、土壤纖維介面參數 (介面摩擦角 δ 與介面係數 $C_{i,\phi}$)、及應力條件 (圍壓 σ_3 或正應力 σ_n)。表 2 彙整收集資料中，各因子之上下界值。

4.2 文獻資料數據化

本研究收集 1983~2015 年纖維加勁土壤之三軸與直剪試驗資料，所考慮之參數包含土壤參數 (土壤種類、分類、平均粒徑 D_{50} 、乾單位重 γ_d 、摩擦角 ϕ)、纖維參數 (纖維種類、長度 L_f 、直徑 D_f 、體積含量 X_f 、重量含量 W_f 、及比重 $G_{s,f}$)、土壤纖維介面參數 (介面摩擦角 δ 與介面係數 $C_{i,\phi}$)、及應力參數 (圍壓 σ_3 或正應力 σ_n) 等。資料萃取過程中，本研究透過文獻作者引用且進行相關實驗之成果 (表 3)，交互檢核採用資料的合理性，確保後續纖維加勁土壤剪力強度參數預測模型建構之可靠性。

本研究將文獻內記載的資料數據化，作法概分 2 類。第一類為將文獻內文敘述或呈現於表中的參數值，直接擷取並紀錄為結構式數據資料 (如圖 3 所示)；第二類為利用文獻內呈現的試驗結果，如三軸試驗 (應力-應變圖) 與直接剪力試驗 (剪力-變位圖)，反推土壤剪力強度參數。在資料截取的過程力求精確，並反覆仔細檢查，避免資料轉換錯誤或誤植的情況發生。圖 4 為將試驗結果轉換為土壤剪力強度參數之流程圖，以下說明推求步驟。

1. 利用三軸試驗之「應力-應變圖」推算纖維加勁土壤摩擦角

步驟一：利用應力-應變圖，選取某圍壓條件 σ_3 下所對應之軸差應力最大值或峰值 $\sigma_{d, \max}$ ；

步驟二：將 σ_3 與 $\sigma_{d, \max}$ 轉換成應力路徑 ($p'-q$)；

步驟三：依迴歸法決定應力路徑圖上的破壞包絡線，求得斜率 $\tan \alpha$ 與截距 a ，並轉換為摩擦角 $\phi = \sin^{-1}(\tan \alpha)$ 與凝聚力 $c = a/\cos \phi$ ，即可獲得纖維加勁土壤剪力強度參數值。

表 2 纖維加勁土壤參數

變數	類別	參數名稱	最大值	最小值
輸入變數 (應變數)	纖維幾何與物理特性	纖維種類	Polyprop/ployster/polyamide/steel/glass/coir/palm	
		纖維長度 L_f (mm)	51	6
		纖維直徑 D_f (mm)	1.25	0.01
		體積含量 X_f (%)	5.53	0.17
		重量含量 W_f (%)	6.55	0.10
		纖維比重 $G_{s,f}$	7.85	0.58
	土壤物理與力學性質	土壤分類	SP/SW	
		類型	Fine sand/medium sand/medium dune/medium mortar/coarse sand	
		平均粒徑 D_{50} (mm)	1.45	0.09
		乾土單位重 γ_d (kN/m ³)	18.39	13.00
		土壤摩擦角 ϕ (°)	43.0	26.4
		凝聚力 c (kPa)	6.9	0
	土壤纖維介面	介面摩擦角度 δ (°)	40	16
		介面摩擦係數 $C_{i,\phi}$	1.33	0.37
應力條件	圍壓/正向力 σ_3 or σ_n (kPa)	600	20	
輸出變數 (自變數)	剪力強度參數	纖維加勁土壤摩擦角 ϕ_{FRS} (°)	67.4	31.7

表 3 纖維加勁土壤資料庫

		纖維參數						土壤與土壤纖維介面參數					應力參數	土壤或纖維加勁土壤摩擦角
文獻	資料數	纖維種類	L_f (mm)	D_f (mm)	X_f (%)	W_f (%)	$G_{s,f}$	土壤分類	土壤種類	D_{50} (mm)	γ_d (kN/m ³)	$C_{i,\phi}$	σ_3 or σ_n (kPa)	ϕ or ϕ_{FRS} (°)
Shao <i>et al.</i> [12]	15	Nylon	12	0.1	0.2 ~ 1.75	0.1 ~ 0.9	0.91	SP	Fine Sand	0.31	17.5	0.55	50 ~ 250	29.8 ~ 37.1
Li and Zornberg [52]	24	PP	25 ~ 50	0.2 ~ 0.7	0.18 ~ 0.70	0.1 ~ 0.4	0.91	SP	Medium Sand	0.7	15.54 ~ 15.91	0.53 ~ 0.56	60 ~ 210	31.6 ~ 48.4
Ahmad <i>et al.</i> [16]	18	Palm	15 ~ 45	0.4	0.25 ~ 0.50	0.25 ~ 0.50	1.46	SP	Medium Sand	0.68	14.50	1.08 ~ 1.33	50 ~ 250	30.5 ~ 37.8
Sadek <i>et al.</i> [59]	18	Nylon	7 ~ 27	0.18	0.5 ~ 1.5	0.4 ~ 1.2	1.3	SP	Fine/ Medium Sand	0.39 ~ 1.45	16.11 ~ 16.18	0.47 ~ 0.55	100 ~ 200	30.5 ~ 43.4
Consoli <i>et al.</i> [57]	14	PP	12 ~ 50	0.02 ~ 0.1	0.82	0.50	0.91	SP	Fine Sand	0.09	14.69	0.80	100 ~ 400	37.0 ~ 47.8
Sivakumar Babu <i>et al.</i> [15]	8	Coir	15	0.25	1.34 ~ 2.01	0.5 ~ 1.5	1.08	SP	Fine Sand	0.43	14.38	0.9	100 ~ 150	43.4 ~ 56.3
Consoli <i>et al.</i> [56]	12	PP	6 ~ 24	0.02	0.85	0.51	0.91	SP	Fine Sand	0.16	15.08	0.81	100 ~ 400	26.4 ~ 37.0
Chen [63]	12	PP	51	0.75	0.67 ~ 0.73	0.40	0.91	SP	Fine Sand	0.18	14.95 ~ 16.25	0.82	140 ~ 415	29.7 ~ 41.5
Ibraim and Fourmont [13]	33	PP	35	0.1	0.44 ~ 1.44	0.30 ~ 1.00	0.91	SP	Fine Sand	0.32	13.00 ~ 14.45	0.79 ~ 0.81	55 ~ 508	30.9 ~ 40.2
Gregory [64]	15	PP	50	0.24	0.3 ~ 3.52	0.17 ~ 2.07	0.91	SP	Fine Sand	0.25	15.53	0.50	69 ~ 276	33.2 ~ 54.8
Consoli <i>et al.</i> [20]	14	PE/PP/ Glass	6 ~ 36	0.01 ~ 0.18	0.30 ~ 0.87	0.51	0.91 ~ 2.62	SP	Fine Sand	0.16	15.3	0.50 ~ 0.82	60 ~ 100	36.3 ~ 49.8
Michalowski and Čermák [9]	24	Nylon/ Steel	25.4	0.3	0.5 ~ 2	0.38 ~ 2.40	1.28 ~ 7.85	SP	Fine/ Coarse Sand	0.22 ~ 0.89	15.66 ~ 16.45	0.37 ~ 0.64	50 ~ 600	38.1 ~ 45.6
Yetimoglu and Salbas [5]	15	Nylon	20	0.05	0.18 ~ 0.89	0.1 ~ 0.5	0.93	SP	Fine Sand	0.30	16.3	0.55	103 ~ 321	40.4 ~ 42.3
Al-Refeai [62]	8	PP	25 ~ 51	0.39 ~ 0.44	0.38	0.20	0.90	SP	Fine Sand	0.30	16.57	0.80	50 ~ 200	38.0 ~ 48.8
Consoli <i>et al.</i> [60]	6	Glass	12.8	0.5	0.2	0.3	2.62	SW	Medium Sand	0.5	17.5	0.52	20 ~ 100	35.0 ~ 46.0
Nataraj and McManis [50]	4	PP	25	0.4	0.17 ~ 0.51	0.1 ~ 0.3	0.91	SP	Fine Sand	0.17	15.2	0.52	342	33.5 ~ 38.8

表 3 纖維加勁土壤資料庫 (續)

		纖維參數						土壤與土壤纖維介面參數					應力參數	
文獻	資料數	纖維種類	L_f (mm)	D_f (mm)	X_f (%)	W_f (%)	G_{sf}	土壤分類	土壤種類	D_{50} (mm)	γ_d (kN/m ³)	$c_{i,\phi}$	σ_3 or σ_n (kPa)	ϕ or ϕ_{FRS} (°)
Michalowski and Zhao [8]	14	Nylon/Steel	25.4	0.3 ~ 0.64	0.5 ~ 1.25	0.40 ~ 6.55	1.28 ~ 7.85	SP	Coarse Sand	0.89	15.66	0.39 ~ 0.69	50 ~ 600	36.5 ~ 37.8
Al-Refeai [18]	6	PP/Glass	25	0.3 ~ 0.4	0.3 ~ 0.91	0.5	0.9 ~ 2.68	SP//SW	Fine/Medium Sand	0.18 ~ 0.78	15.83 ~ 16.07	0.43 ~ 0.52	200	36.5 ~ 58.6
Maher and Gray [7]	30	Glass	18 ~ 37	0.3	0.45 ~ 3.43	0.74 ~ 5.97	2.7	SP	Medium Sand	0.41 ~ 0.60	16.05 ~ 18.39	0.52 ~ 0.66	50 ~ 300	30.3 ~ 67.4
Gray and Al-Refeai [19]	26	Reed/Glass	13 ~ 38	0.3 ~ 1.25	0.3 ~ 5.53	0.21 ~ 6.00	0.58 ~ 2.7	SP	Medium Sand	0.41	16.05	0.56 ~ 0.85	200	33.3 ~ 59.4

Note: PP: Polypropylene; PE: Polyester.

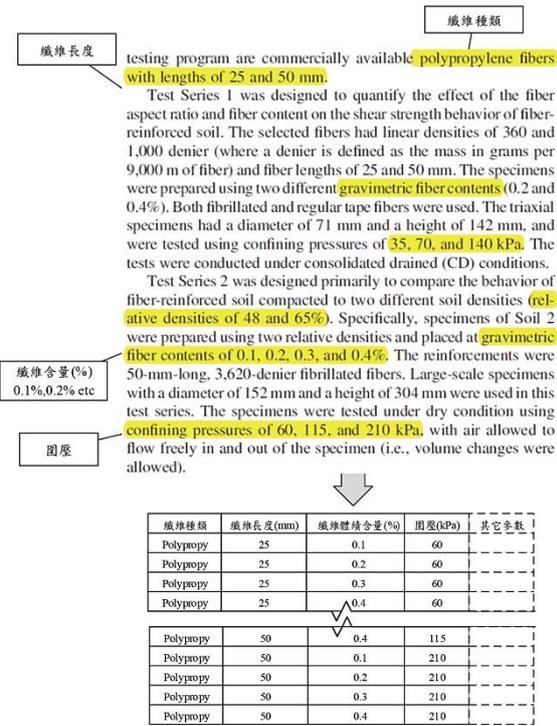


圖 3 文獻內文資料採擷示意圖 (文獻內文出自 Li and Zornberg [52])

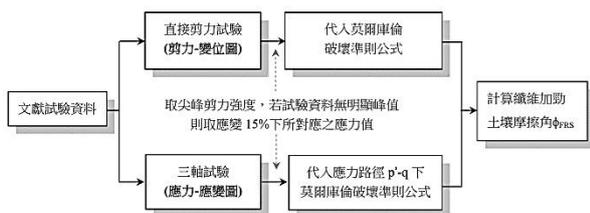


圖 4 利用文獻試驗結果求得纖維加勁土壤摩擦角流程圖

2. 利用直接剪力試驗之「剪力-變位圖」推算纖維加勁土壤摩擦角

步驟一：利用剪力-變位圖求得某正應力 σ_n 下所對應之尖峰剪力強度 τ_{max} ；

步驟二：將不同 σ_n 與 τ_{max} 值繪製成莫爾庫倫圖；

步驟三：以迴歸求得摩爾庫倫破壞包絡線之斜率 $\tan \phi$ 與截距 c ，即可獲得纖維加勁土壤剪力強度參數值。

當纖維加勁土壤呈現應力硬化 (soil hardening) 的趨勢，應力將隨應變增加而上升，此時應力曲線並無明顯的最大值或峰值可茲選取。若有上述情況，則依 ASTM 試驗規範建議，取應變 15% 下對應之應力值為土壤破壞時的剪力強度。

經前述的資料轉化程序，本研究從 20 篇當代文獻 (表 3) 彙集 316 筆纖維幾何與物理特性、土壤物理與力學性質、土壤纖維介面參數、應力條件及纖維加勁土壤剪力強度參數資料。後續分析過程將剔除 16 筆不完整的採集樣本，計 300 筆有效資料，作為各交叉驗證預測模型訓練、測試的樣本資料庫。

五、模型預測成果分析

本章節討論與評估各模型預測準確度，而為與經驗及理論公式比較，分析資料以三種群組方式呈現：第一群組包含完整參數如表 2 所示，採預處理後之 300 筆有效樣本資料進行分析。第二群組則使用 Michalowski and Cermak 理論公式 (Eq. 1) 所考慮的因子，包括纖維長徑比 $\eta_f (=L_f/D_f)$ 、土壤摩擦角 ϕ 、土壤與纖維介面摩擦角 δ 、體積含量 X_f 。第三群組以 Zornberg 半經驗公式 (Eq. 2) 考量的因子，包含包括纖維長徑比 η_f 、土壤摩擦角 ϕ 、土壤與纖維介面摩擦係數 $C_{i,\phi}$ 、體積含量 X_f 。於 Zornberg 公式中的經驗係數 $\alpha = 0.5$ 與 1.0 ，分別代表加勁纖維發揮一半與最佳效能的狀況。

需注意的是, Michalowski and Cermak 與 Zornberg 公式係針對纖維拉出破壞模式所發展, 然而當纖維加勁土壤承受應力過大 (應力參數 > 400 kPa) 或是埋設纖維過長 (纖維長徑比大於 > 200), 有可能產生纖維斷裂破壞模式, 故採理論或經驗公式時, 資料庫裡符合上述情況的樣本必須予以摒除。爰此, 有 85 筆資料在第二群組與第三群組中移除, 計剩 215 筆樣本資料納入分析。後續將上述三類群組分別使用基準模型及啟發式演化組合模型, 依隨機抽樣交叉驗證法, 評估纖維加勁土壤剪力強度參數推測準確度, 以下小節說明各群組的預測成果。

5.1 第一群組模型成果評析

1. 基準預測模型

預測 FRS 摩擦角的基準 (Baseline) 模型包含 ANN, CART, CHAID, GENLIN, REG, SVR, 由第一群組交叉驗證結果顯示 SVR 模型表現優於其它基準模型, 其 R 值高達 0.9 (1 為完全相關)、MAPE 5.61% (表 4), 綜合績效指數亦為最佳。

表 4 纖維加勁土壤摩擦角基準模型與演化模型交叉驗證預測成果排序

方法	模型	R		RMSE (°)		MAE (°)		MAPE (%)		SI _{Group}	RANK _{Group}	SI _{All}	RANK _{All}
		數值	正規化	數值	正規化	數值	正規化	數值	正規化				
第一群組													
Baseline	SVR	0.90	0.75	3.44	0.76	1.90	0.59	5.61	0.70	0.84	8	0.58	18
Voting	CART+GENLIN+SVR	0.92	0.88	2.91	0.50	1.85	0.56	5.01	0.55	0.62	5	0.43	10
Bagging	SVR	0.94	1.00	2.46	0.27	1.38	0.22	4.09	0.32	0.28	3	0.20	4
Stacking	CART	0.90	0.73	2.54	0.31	2.05	0.70	5.56	0.69	0.74	7	0.49	15
Tiering(2)	<u>SVM-(SVR/SVR)</u>	<u>0.89</u>	<u>0.68</u>	<u>1.98</u>	<u>0.03</u>	<u>1.07</u>	-	<u>3.27</u>	<u>0.12</u>	0.22	1	0.12	<u>1</u>
Tiering(3)	SVM-(REG/CART/GENLIN)	0.89	0.66	3.00	0.54	1.91	0.60	4.40	0.40	0.71	6	0.47	13
Tiering(4)	SVM-(*SVR/SVR/*)	0.89	0.69	1.98	0.03	1.41	0.24	3.27	0.12	0.30	4	0.18	3
Tiering(5)	SVM-(*REG/CHAID/GENLIN/*)	0.86	0.52	1.92	-	1.17	0.07	2.79	-	0.28	2	0.14	2
第二群組													
Baseline	ANN	0.89	0.71	3.56	0.82	2.47	0.99	6.58	0.94	0.73	7	0.76	21
Voting	ANN+GENLIN+SVR	0.91	0.81	3.18	0.63	2.10	0.73	5.65	0.71	0.49	5	0.57	17
Bagging	CHAID	0.85	0.43	3.80	0.94	2.45	0.98	6.82	1.00	0.87	8	0.87	24
Stacking	REG	0.91	0.82	3.02	0.55	1.92	0.60	5.15	0.58	0.38	4	0.48	14
Tiering(2)	SVM-(CART/CHAID)	0.86	0.50	2.28	0.18	1.27	0.14	3.88	0.27	0.13	1	0.27	7
Tiering(3)	SVM-(REG/CART/GENLIN)	0.85	0.44	3.43	0.76	2.25	0.84	5.14	0.58	0.63	6	0.69	19
Tiering(4)	SVM-(*CART/SVM/*)	0.83	0.34	2.46	0.27	1.31	0.17	3.96	0.29	0.22	2	0.35	8
Tiering(5)	SVM-(*CART/CHAID/SVR/*)	0.77	-	2.28	0.18	1.49	0.30	3.47	0.17	0.30	3	0.41	9
第三群組													
Baseline	ANN	0.89	0.71	3.57	0.83	2.48	1.00	6.60	0.94	0.75	7	0.77	22
Voting	ANN+CART+SVR	0.92	0.84	3.20	0.64	2.05	0.70	5.46	0.66	0.48	5	0.54	16
Bagging	CART	0.86	0.49	3.91	1.00	2.24	0.83	6.50	0.92	0.81	8	0.81	23
Stacking	GENLIN	0.92	0.88	2.94	0.51	1.88	0.57	5.07	0.56	0.36	3	0.44	11
Tiering(2)	SVM-(CART/CHAID)	0.86	0.53	2.24	0.16	1.23	0.12	3.83	0.26	0.14	2	0.25	6
Tiering(3)	SVM-(REG/CART/GENLIN)	0.85	0.46	3.45	0.77	2.26	0.85	5.18	0.59	0.65	6	0.69	20
Tiering(4)	SVM-(*CART/CHAID/*)	0.87	0.57	2.18	0.13	1.19	0.09	3.65	0.21	0.09	1	0.21	5
Tiering(5)	SVM-(*CART/CHAID/CART/*)	0.78	0.03	2.39	0.24	1.62	0.39	3.73	0.23	0.37	4	0.46	12

註：粗體底線標註為各預測方法中之績效表現最佳模型；*字符號為該類別無資料；SI_{Group} 為群組綜合績效指標；RANK_{Group} 為群組排名；SI_{All} 為整體綜合績效指標；RANK_{All} 為整體綜合績效指標之排名。

2. 啟發式演化組合模型

在表決法 (Voting) 中，CART + GENLIN + SVR 的組合表現最佳，R 值為 0.92 且 MAPE 僅 5.01%；於重複採樣平均表決法 (Bagging) 中，SVR 模型最為穩定且預測能力最好，R 高達 0.94，而 MAPE 達 4.09%；演化堆疊法 (Stacking) 的 CART 模型 R 值接近 0.9 而 MAPE 稍差，為 5.56%；分類-迴歸層級法 (Tiering) 中，樣本分為 2 類後，預測績效表現最優異，SVM-(SVR/SVR) 模型預測績效之 R 值近 0.9，而 MAPE 僅 3.27%，該模型為所有啟發式演化組合模型中最優者 (表 4)。

5.2 第二群組模型成果評析

1. 基準預測模型

第二群組中，基準模型的預測能力以 ANN 表現最佳，R 值高達 0.89、MAPE 為 6.58%，其模型預測成果詳如表 4。

2. 啟發式演化組合模型

於表決法 (Voting) 中，ANN + GENLIN + SVR 的組合表現最佳，R 值為 0.91 且 MAPE 為 5.65%；重複採樣平均表決法 (Bagging) 中，CHAID 預測能力最好，R 值為 0.85，MAPE 稍差，但亦達 6.82%；而演化堆疊法 (Stacking) 的 REG 模型 R 值高達 0.91，MAPE 為 5.15%；分類-迴歸層級法 (Tiering) 中，樣本分為 2 類後，預測績效表現最佳，其中的 SVM-(CART/CHAID) 模型預測績效 R 值為 0.86，而 MAPE 僅 3.88%。

5.3 第三群組模型成果評析

1. 基準預測模型

基準模型預測成果顯示，ANN 表現最佳，R 值為 0.89，且 MAPE 為 6.60% (表 4)。

2. 啟發式演化組合模型

表決法 (Voting) 中，ANN + CART + SVR 的組合表現最佳，R 值為 0.92 且 MAPE 為 5.46%；重複採樣平均表決法 (Bagging) 中，CART 模型的表現最佳，R 值為 0.86，MAPE 則稍差，為 6.50%；而演化堆疊法 (Stacking) 以 GENLIN 模型的預測能力最好，R 值高達 0.92，MAPE 為 5.07%；分類-迴歸層級法 (Tiering) 中，樣本分為 4 類的 SVM-(*CART/CHAID/*) 模型 R 值為 0.87，而 MAPE 達 3.65%。

5.4 理論、經驗公式與群組模型分析成果比較

表 5 彙整第一群組、第二群組及第三群組中，績效最優的模型預測成果。整體比較顯示，第一群組的 Tiering SVM-(SVR/SVR) 模型有最佳的表現與績效，其 R 值高達 0.89，MAPE 達 3.27%。表 5 顯示第二與第三群組的分析成果在各項指標下皆相近，原因為兩群組僅有一不同的預測因子 (第二群組的 $C_{i,\phi}$ 與第三群組的 δ)。而該因子間可相互推算 ($C_{i,\phi} = \tan \delta / \tan \phi$)，故第二與第三群組具相近的預測成果。

表 5 理論、經驗公式與模型分析成果比較

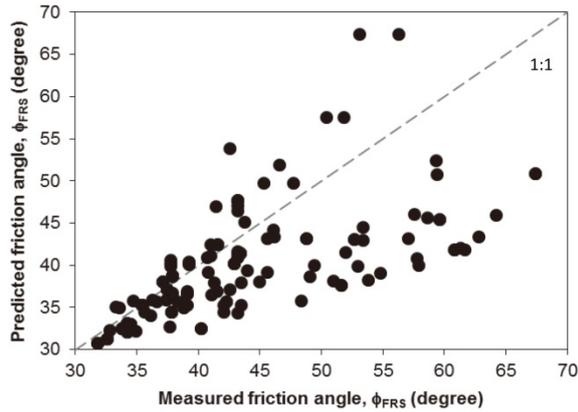
方法/模型	交叉驗證預測效能				相對改善率(%)			
	R	RMSE (°)	MAE (°)	MAPE (%)	R	RMSE	MAE	MAPE
Michalowski and Cermak [9]	0.66	7.45	5.22	10.60	-	-	-	-
Zornberg [21] 假設 $\alpha = 0.5$	0.75	6.52	4.47	9.10	-	-	-	-
Zornberg [21] 假設 $\alpha = 1$	0.79	5.48	4.24	9.80	-	-	-	-
第一群組 Tiering SVM-(SVR/SVR)	0.89	1.98	1.07	3.27	35.63%	73.43%	79.50%	69.15%
					17.97%	69.62%	76.04%	64.07%
					13.12%	63.87%	74.76%	66.63%
第二群組 Tiering SVM-(CART/CHAID)	0.86	2.28	1.27	3.88	31.06%	69.40%	75.66%	63.40%
					13.99%	65.02%	71.56%	57.36%
					9.31%	58.40%	70.04%	60.41%
第三群組 Tiering SVM-(*CART/CHAID/*)	0.87	2.18	1.19	3.65	31.06%	69.40%	75.66%	63.40%
					15.40%	66.53%	73.39%	59.89%
					10.66%	60.20%	71.97%	62.76%

*表該類別無資料。

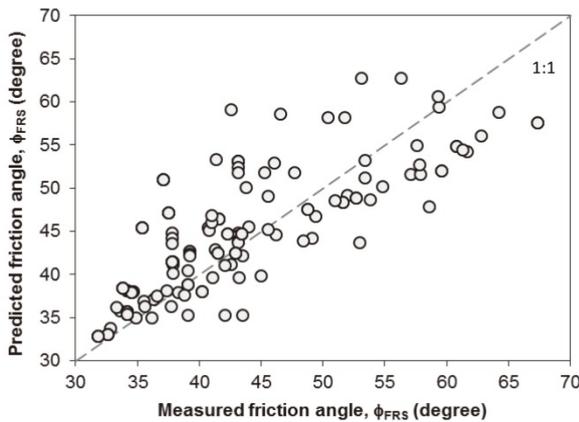
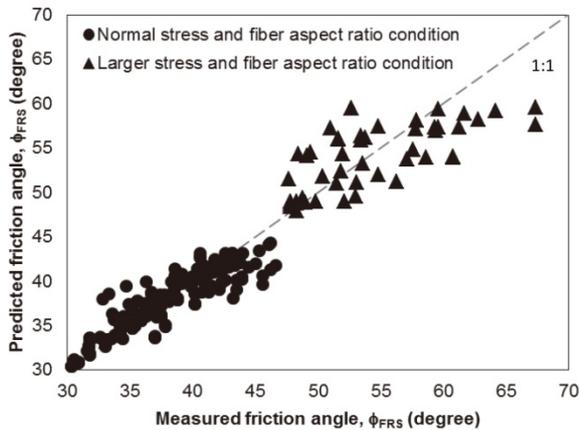
本研究後續評估 Michalowski and Cermak 理論公式與 Zornberg 半經驗公式在預測纖維加勁土壤摩擦角上的準確度。結果顯示 (表 5)，Michalowski and Cermak 理論公式所得的評估 R 值為 0.66，而 MAPE 為 10.6%；Zornberg 半經驗公式所得之 R 值為 0.75 ~ 0.79，而 MAPE 介於 9.1 ~ 9.8%。在 Zornberg 公式中，假設經驗係數 $\alpha = 1$ 比 $\alpha = 0.5$ 可獲得較佳的預測結果，顯示纖維在土壤內確可發揮最佳的效能。然而無論假設 α 值為何，Zornberg 半經驗公式在纖維加勁土壤摩擦角的推測上皆優於 Michalowski and Cermak 理論公式。

若比較理論公式、經驗公式、第一群組 Tiering SVM-(SVR/SVR) 模型、第二群組 Tiering SVM-(CART/CHAID) 模型及第三群組 Tiering SVM-(*CART/CHAID/*) 模型 (如表 5 所示)，可發現各群組的最佳啟發式演化組合模型的預測能力皆優於理論與經驗公式，R 值顯著提升 9.31 ~ 35.63%、RMSE 58.4 ~ 73.43%、MAE 70.04 ~ 79.50% 及 MAPE 改善率亦達 57.36 ~ 69.15%。從預測值與實際值的比較圖中 (如圖 5 所示)，第一群組 Tiering SVM-(SVR/SVR) 模型的預測值與實際資料沿 1:1 線分佈，然而 Zornberg 半經驗公式與 Michalowski and Cermak 理論公式的資料點呈現較分散的趨勢，特別是當摩擦角高於 40 度後。

由前述比較結果顯示，本研究建構之啟發式演化組合模型，可有效提升纖維加勁土壤剪力強度參數之預測精確度，並實證應用資料探勘技術及人工智慧模式可以作為纖維加勁土壤剪力強度參數預測上的替選方法。



(a) Michalowski and Cermak 理論公式

(b) Zornberg 半經驗公式 ($\alpha = 1$)

(c) 第一群組 Tiering SVM-(SVR/SVR) 模型

圖 5 預測值與實際值比較圖

六、結論與建議

本研究回顧 1983 ~ 2015 年有關纖維加勁土壤三軸與直剪試驗文獻，擷取纖維加勁土壤屬性與試驗資料，建立一樣本資料庫。接續應用資料探勘技術及人工智慧模式，建構纖維加勁土壤摩擦角預測模式。根據分析結果，歸納以下結論：

1. 各類啟發式演化組合模型的預測表現皆優於基準模型，而其中第一群組的 Tiering SVM-(SVR/SVR) 模型為最適配模型， R 值高達 0.89、MAPE 為 3.27%，屬高精度

預測。

2. 啟發式演化模型組合法中的分類—迴歸層級法 Tiering SVM-(SVR/SVR)，其預測值與實際值間的相關係數 $R = 0.89$ 、平均絕對值誤差率 MAPE $< 4\%$ 、均方根誤差 < 2 度、絕對誤差 MAE < 2 度。
3. Michalowski and Cermak 理論公式預測值與實際值間的相關係數 $R = 0.66$ ，而 Zornberg 半經驗公式的 R 值為 0.75 ~ 0.79。其中，以假設經驗係數 $\alpha = 1.0$ 可獲得較佳的預測結果。
4. 本文提出之各式人工智慧組合模型，其預測績效評估指標的改善效能優於傳統理論或經驗公式，改善率達 9.31 ~ 79.50%。

本研究結果證實應用資料探勘技術及人工智慧模式可作為纖維加勁土壤剪力強度參數預測的便捷方法，並有助於推廣纖維加勁土壤技術於大地工程實務。然而，應用的範圍需僅限於樣本資料庫所收集的材料與應力範疇。由於本文研究的土壤對象為砂土（非黏性土壤），因此後續應用的對象也需僅限於纖維加勁的砂土。

此外，本研究分析群組中的部分因子具高度相依性，因此採用建議因子前，可輔以統計科學上的相關性分析或主成分分析法，擇定顯著性因子或合併高相依因子後，再進行預測模式建置，以免相依因子相互牽制，導致預測模型不穩定情形，並可減少日後資料預處理的成本。

為持續優化精進預測模式之效能，除可朝設計自然（仿生）萬用啟發式演算法或自適性超參數調校預測模型發展，亦可就相同條件之 FRS 探討纖維加勁土壤參數的 COV（共變異係數）、平均值及標準差，以獲知資料庫中剪力強度參數樣本離散情況，進而推求預測結果之上下界限。

另為確保預測模型的通用性與適用性，建議後續研究除需擴增資料庫樣本茲以累積工程經驗值，可透過雲端機器學習及其它國際通用資料探勘軟體，如：Microsoft Azure Machine Learning Studio、R、WEKA、MATLAB、Python 等，比較本文研提之理論方法的預測成效，並可依確立模型配合主流程式語言，研發單機版或網際網路版的專家資訊系統平台，作為工程師或設計單位於離散纖維加勁土壤剪力強度便捷預測操作之人機輔助介面。

參考文獻

1. Gray, D. and Ohashi, H., "Mechanics of fiber reinforcement in sand," *Journal of Geotechnical Engineering*, Vol. 109, No. 3, pp. 335–353 (1983).
2. Hejazi, S. M., Sheikhzadeh, M., Abtahi, S. M., and Zadhoush, A., "A simple review of soil reinforcement by using natural and synthetic fibers," *Construction and Building Materials*, Vol. 30, pp. 100–116 (2012).
3. Li, J., Tang, C., Wang, D., Pei, X., and Shi, B., "Effect of discrete fibre reinforcement on soil tensile strength," *Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering*, Vol. 6, No. 2, pp. 133–137 (2014).
4. Chauhan, M. S., Mittal, S., and Mohanty, B., "Performance evaluation of silty sand subgrade reinforced with fly ash and fibre," *Geotextiles and Geomembranes*, Vol. 26, No. 5, pp. 429–435 (2008).

5. Yetimoglu, T. and Salbas, O., "A study on shear strength of sands reinforced with randomly distributed discrete fibers," *Geotextiles and Geomembranes*, Vol. 21, No. 2, pp. 103–110 (2003).
6. Kumar, S. and Tabor, E., "Strength characteristics of silty clay reinforced with randomly oriented nylon fibers," *Electronic Journal of Geotechnical Engineering*, Vol. 8, No. 2, p. 10 (2003).
7. Maher, M. and Gray, D., "Static response of sands reinforced with randomly distributed fibers," *Journal of Geotechnical Engineering*, Vol. 116, No. 11, pp. 1661–1677 (1990).
8. Michalowski, R. and Zhao, A., "Failure of fiber-reinforced granular soils," *Journal of Geotechnical Engineering*, Vol. 122, No. 3, pp. 226–234 (1996).
9. Michalowski, R. and Čermák, J., "Triaxial compression of sand reinforced with fibers," *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, Vol. 129, No. 2, pp. 125–136 (2003).
10. Mortazavian, S. and Fatemi, A., "Fatigue behavior and modeling of short fiber reinforced polymer composites: A literature review," *International Journal of Fatigue*, Vol. 70, pp. 297–321 (2015).
11. Ranjan, G., Vasani, R. M., and Charan, H. D., "Behaviour of plastic-fibre-reinforced sand," *Geotextiles and Geomembranes*, Vol. 13, No. 8, pp. 555–565 (1994).
12. Shao, W., Cetin, B., Li, Y., Li, J., and Li, L., "Experimental investigation of mechanical properties of sands reinforced with discrete randomly distributed fiber," *Geotechnical and Geological Engineering*, Vol. 32, No. 4, pp. 901–910 (2014).
13. Ibrahim, E. and Fourmont, S., "Behaviour of sand reinforced with fibres, soil stress-strain behavior: Measurement," *Modeling and Analysis*, Vol. 146, pp. 807–818 (2007).
14. Santoni, R., Tingle, J., and Webster, S., "Engineering properties of sand-fiber mixtures for road construction," *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, Vol. 127, No. 3, pp. 258–268 (2001).
15. Sivakumar Babu, G. L., Vasudevan, A. K., and Haldar, S., "Numerical simulation of fiber-reinforced sand behavior," *Geotextiles and Geomembranes*, Vol. 26, No. 2, pp. 181–188 (2008).
16. Ahmad, F., Bateni, F., and Azmi, M., "Performance evaluation of silty sand reinforced with fibres," *Geotextiles and Geomembranes*, Vol. 28, No. 1, pp. 93–99 (2010).
17. Anggraini, V., Asadi, A., Huat, B. B. K., and Nahazanan, H., "Effects of coir fibers on tensile and compressive strength of lime treated soft soil," *Measurement*, Vol. 59, pp. 372–381 (2015).
18. Al-Refeai, T. O., "Behavior of granular soils reinforced with discrete randomly oriented inclusions," *Geotextiles and Geomembranes*, Vol. 10, No. 4, pp. 319–333 (1991).
19. Gray, D. and Al-Refeai, T., "Behavior of fabric-versus fiber-reinforced sand," *Journal of Geotechnical Engineering*, Vol. 112, No. 8, pp. 804–820 (1986).
20. Consoli, N., Montardo, J., Donato, M., and Prietto, P., "Effect of material wproperties on the behaviour of sand-cement-fibre composites," *Proceedings of the ICE-Ground Improvement*, Vol. 8, No. 2, pp. 77–90 (2004).
21. Zornberg, J., "Discrete framework for limit equilibrium analysis of fibre-reinforced soil," *Géotechnique*, Vol. 52, No. 8, pp. 593–604 (2002).
22. Li, C. and Zornberg, J. G., "Validation of discrete framework for fiber-reinforcement," *Proc. Two Rivers Conference, North American Geosynthetics Society, Winnipeg, Canada, Session E*, Vol. 10, p. 2003(2003).
23. Najjar, S., Sadek, S., and Alcovero, A., "Quantification of model uncertainty in shear strength predictions for fiber-reinforced sand," *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, Vol. 139, No. 1, pp. 116–133 (2013).
24. Goh, A., "Seismic liquefaction potential assessed by neural networks," *Journal of Geotechnical Engineering*, Vol. 120, No. 9, pp. 1467–1480 (1994).
25. Park, H. I. and Kim, Y. T., "Prediction of strength of reinforced lightweight soil using an artificial neural network," *Engineering Computations*, Vol. 28, No. 5, pp. 600–615 (2011).
26. Samui, P., "14 - Slope Stability Analysis Using Multivariate Adaptive Regression Spline," Alavi, Ed., *Metaheuristics in Water, Geotechnical and Transport Engineering*, Elsevier, Oxford, pp. 327–342 (2013).
27. Alkroosh, I. and Nikraz, H., "Simulating pile load-settlement behavior from CPT data using intelligent computing," *Open Engineering*, Vol. 1, No. 3, pp. 295–305 (2011).
28. Tsompanakis, Y., Lagaros, N. D., Psarropoulos, P. N., and Georgopoulos, E. C., "Simulating the seismic response of embankments via artificial neural networks," *Advances in Engineering Software*, Vol. 40, No. 8, pp. 640–651 (2009).
29. Benardos, A. G. and Kaliampakos, D. C., "Modelling TBM performance with artificial neural networks," *Tunnelling and Underground Space Technology*, Vol. 19, No. 6, pp. 597–605 (2004).
30. Goh, A. T., Kulhawy, F. H., and Chua, C., "Bayesian neural network analysis of undrained side resistance of drilled shafts," *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, Vol. 131, No. 1, pp. 84–93 (2005).
31. Alkroosh, I. and Nikraz, H., "Correlation of pile axial capacity and CPT data using gene expression programming," *Geotechnical and Geological Engineering*, Vol. 29, No. 5, pp. 725–748 (2011).
32. Armaghani, D. J., Hajihassani, M., Mohamad, E. T., Marto, A., and Noorani, S. A., "Blasting-induced flyrock and ground vibration prediction through an expert artificial neural network based on particle swarm optimization," *Arabian Journal of Geosciences*, Vol. 7, No. 12, pp. 5383–5396 (2014).
33. Yu, Y., Zhang, B., and Yuan, H., "An intelligent displacement back-analysis method for earth-rockfill dams," *Computers and Geotechnics*, Vol. 34, No. 6, pp. 423–434 (2007).
34. Chou, J.-S., Yang, K.-H., Pampang, J. P., and Pham, A.-D., "Evolutionary metaheuristic intelligence to simulate tensile loads in reinforcement for geosynthetic-reinforced soil structures," *Computers and Geotechnics*, Vol. 66, pp. 1–15 (2015).
35. Sykes, A. O., *An Introduction to Regression Analysis*, Chicago (1993).
36. IBM, *Clementine 12.0 Algorithms Guide*, Chicago, Integral Solutions Limited (2009).
37. Timofeev, R., *Classification and Regression Trees (Cart) Theory and Applications*, Humboldt University, Berlin (2004).
38. Kass, G. V., "An exploratory technique for investigating large quantities of categorical data," *Applied Statistics*, Vol. 29, No. 2, pp. 119–127 (1980).
39. Nelder, J. and Wedderburn, R., "Generalized linear models," *Journal of the Royal Statistical Society, Series A (General)*, Vol. 135, No. 3, pp. 370–384 (1972).
40. Das, S. K., "Artificial neural networks in geotechnical engineering: modeling and application issues, metaheuristics in water," *Geotechnical and Transport Engineering*, p. 231 (2012).
41. Vapnik, V. N., *The Nature of Statistical Learning Theory*, New York, Springer-Verlag (1995).

42. Tinoco, J., Gomes Correia, A., and Cortez, P., "Support vector machines applied to uniaxial compressive strength prediction of jet grouting columns," *Computers and Geotechnics*, Vol. 55, pp. 132–140 (2014).
43. Lee, C.-Y. and Chern, S.-G., "Application of a support vector machine for liquefaction assessment," *Journal of Marine Science and Technology*, Vol. 21, No. 3, pp. 318–324 (2013).
44. Chern, S.-G. and Lee, C.-Y., "CPT-based simplified liquefaction assessment by using fuzzy-neural network," *Journal of Marine Science and Technology*, Vol. 17, No. 4, pp. 326–331 (2009).
45. Prodromidis, A. L. and Stolfo, S. J., "A comparative evaluation of meta-learning strategies over large and distributed data sets," *Workshop on Meta-learning, Sixteenth International Conference Machine Learning, Citeseer*, pp. 18–27 (1999).
46. Breiman, L., "Bagging predictors," *Machine Learning*, Vol. 24, No. 2, pp. 123–140 (1996).
47. Wolpert, D. H., "Stacked generalization," *Neural Networks*, Vol. 5, No. 2, pp. 241–259 (1992).
48. Chou, J.-S. and Tsai, C.-F., "Concrete compressive strength analysis using a combined classification and regression technique," *Automation in Construction*, Vol. 24, pp. 52–60 (2012).
49. Kohavi, R., *A Study of Cross-Validation and Bootstrap for Accuracy Estimation and Model Selection*, Stanford University (1995).
50. Nataraj, M. S. and McManis, K. L., "Strength and deformation properties of soils reinforced with fibrillated fibers," *Geosynthetics International*, Vol. 4, No. 1, pp. 65–79 (1997).
51. Loehr, J., Romero, R., and Ang, E., "Development of a strain-based model to predict strength of geosynthetic fiber-reinforced Soil," *Geosynthetics Research and Development in Progress*, pp. 1–7 (2005).
52. Li, C. and Zornberg, J., "Mobilization of reinforcement forces in fiber-reinforced soil," *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, Vol. 139, No. 1, pp. 107–115 (2013).
53. Freitag, D., "Soil randomly reinforced with fibers," *Journal of Geotechnical Engineering*, Vol. 112, No. 8, pp. 823–826 (1986).
54. Consoli, N., Festugato, L., and Heineck, K., "Strain-hardening behaviour of fibre-reinforced sand in view of filament geometry," *Geosynthetics International*, Vol. 16, No. 2, pp. 109–115 (2009).
55. Consoli, N., Casagrande, M., and Coop, M., "Effect of fiber reinforcement on the isotropic compression behavior of a sand," *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, Vol. 131, No. 11, pp. 1434–1436 (2005).
56. Consoli, N., Casagrande, M., and Coop, M., "Performance of a fibre-reinforced sand at large shear strains," *Géotechnique*, Vol. 57, No. 9, pp. 751–756 (2007).
57. Consoli, N. C., Vendruscolo, M. A., Fonini, A., and Rosa, F. D., "Fiber reinforcement effects on sand considering a wide cementation range," *Geotextiles and Geomembranes*, Vol. 27, No. 3, pp. 196–203 (2009).
58. Ranjan, G., Vasan, R., Charan, H., "Probabilistic analysis of randomly distributed fiber-reinforced soil," *Journal of Geotechnical Engineering*, Vol. 122, No. 6, pp. 419–426 (1996).
59. Sadek, S., Najjar, S., and Freiha, F., "Shear strength of fiber-reinforced sands," *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, Vol. 136, No. 3, pp. 490–499 (2010).
60. Consoli, N., Prietto, P., and Ulbrich, L., "Influence of fiber and cement addition on behavior of sandy soil," *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, Vol. 124, No. 12, pp. 1211–1214 (1998).
61. Kaniraj, S. and Havanagi, V., "Behavior of cement-stabilized fiber-reinforced fly ash-soil mixtures," *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, Vol. 127, No. 7, pp. 574–584 (2001).
62. Al-Refeai, A.-S., "Dynamic and static characterization of polypropylene fiber-reinforced dune sand," *Geosynthetics International*, Vol. 5, No. 5, pp. 443–458 (1998).
63. Chen, C.-W., *A Constitutive Model for Fiber-Reinforced Soils*, University of Missouri-Columbia (2007).
64. Gregory, G. H., *Shear Strength, Creep and Stability of Fiber-Reinforced Soil Slopes*, Oklahoma State University (2006).

104 年 8 月 18 日	收稿
104 年 10 月 1 日	修改
105 年 10 月 14 日	接受